Soluții

1. a) Se verifică prin calcul.

b) Din $A^2 = 0_2$ obținem sistemul: $\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ (a-d)(a+d) = 0 \end{cases}$. Presupunem că $a + d \neq 0$. Rezultă $b = c = 0$ şi $a = d$. Din prima şi din ultima ecuație din sistem rezultă $a = d = 0$, deci $a + d = 0$, contradicție.

c) Din punctul b) avem că $a + d = 0$ şi din $A^2 = 0_2$ deducem $\det(A - x \cdot I_2) = x^2$.
Obținem $\det(A + 2I_2) = 4$.

2. a) $(a,15) \in G \Leftrightarrow a^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$. Se obține $a \in \{-26, 26\}$.

b) Pentru $(a, b), (c, d) \in G$, avem $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$ şi
$(ac + 3bd)^2 - 3(ad + bc)^2 = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1$.

c) Se verifică axiomele grupului. Se arată că elementul neutru este $(1, 0) \in G$ şi $\forall (a, b) \in G$, simetricul acestuia este $(a, -b) \in G$.